Teoria Pola Elektromagnetycznego

Wykład 3

Pole elektryczne w środowisku przewodzącym

19.05.2006

Stefan Filipowicz

3.1. Prąd i gęstość prądu przewodzenia

- Jeżeli w przewodniku istnieje pole elektryczne, to pod wpływem pola powstaje uporządkowany ruch ładunków, który przedstawia sobą **prąd przewodzenia**. W przewodnikach metalicznych prąd przewodzenia traktujemy jako ruch elektronów.
- Natężeniem prądu (lub prądem) nazywamy granicę stosunku ładunku Δ*q* płynącego przez określony przekrój w ciągu czasu Δ*t* do tego czasu gdy ten czas w granicy dąży do zera:

$$i = \lim_{\Delta t \Rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\, q}{\mathrm{d}\, t}$$

Prąd jest wielkością skalarną. Jeżeli jego wartość nie zależy od czasu to jest prądem stałym. Prąd mierzymy w amperach [A].

3.1. Prąd i gęstość prądu przewodzenia

- Gęstością prądu nazywamy wielkość wektorową ***J*** której wartość liczbowa równa się granicy stosunku prądu przepływającego przez określoną powierzchnię prostopadła do kierunku ruchu ładunków, do pola tej powierzchni, gdy ona dąży w granicy do zera:

$$\boldsymbol{J} = \lim_{\Delta S_n \Rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S_n} = \frac{\mathrm{d}\, i}{\mathrm{d}\, S_n}$$

- Zwrot wektora ***J*** przyjmujemy za zgodny z ruchem ładunków dodatnich. Prąd i gęstość prądu związana jest zależnością:

$$i = \int_{S} \boldsymbol{J}\, \mathrm{d}\, \boldsymbol{S}$$

- Gęstość prądy mierzymy w amperach na metr kwadratowy [A/m^2] lub [C/sm^2]

3.2. Prawo Ohma w postaci różniczkowej

- W przewodniku jednorodnym izotropowym gęstość prądu przewodzenia ***J*** jest proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego ***E***, czyli:

$$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$$

- Równanie to wyraża prawo Ohma w postaci różniczkowej. Współczynnik γ nazywamy przewodnością właściwą lub konduktywnością materiału i mierzymy w [1/Ωm].
- Aby w przewodniku ciągle płynął prąd, konieczne jest występowanie pola elektrycznego związanego z powstawaniem sił które poruszają ładunki. Takie pole nazywamy polem elektrycznym zewnętrznym. Natężenie pola elektrycznego zewnętrznego oznaczamy przez $\boldsymbol{E}_z$ zgodnie ze wzorem:

$$\boldsymbol{E}_z = \lim_{q \Rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{F}_z}{q}$$

3.2. Prawo Ohma w postaci różniczkowej

- Jeżeli w przewodniku działają jednocześnie siły pola elektrostatycznego i zewnętrznego to wypadkowe natężenie pola

$$\boldsymbol{E'} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_z$$

i wtedy prawo Ohma ma postać:

$$\boldsymbol{J} = \gamma\, \boldsymbol{E'} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_z)$$

Prawo Ohma w postaci różniczkowej stosuje się zarówno dla pola stałego jak i zmiennego w czasie.

3.2. Prąd przesunięcia

- Załóżmy, że gęstość ładunków ρ wewnątrz rozpatrywanej objętości zmienia się z prędkością $\frac{\partial \rho}{\partial t}$.
- Teraz rozbieżność gęstości prądu przewodzenia nie jest równa zeru, ponieważ każdy nowy ładunek pojawiający się w tej objętości jest początkiem lub końcem linii pola. Strumień wektora gęstości prądu przewodzenia przez powierzchnię zamkniętą ograniczającą daną objętość będzie równy przyrostowi ładunków w obszarze

$$\int_S \boldsymbol{J}_{prz} d\boldsymbol{s} = -\oint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

- Znak minus wskazuje, że przy narastaniu ładunków wewnątrz obszaru, strumień wektora gęstości prądu dopływający do danej objętości jest większy od strumienia który ją opuszcza.

3.2. Prąd przesunięcia

- Przekształcając pierwszą całkę zgodnie z twierdzeniem Ostrogradzkiego-Gaussa otrzymujemy:

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V div\boldsymbol{D} dV$$

$$\int_V d\boldsymbol{iv}\boldsymbol{J}_{prz} d\boldsymbol{V} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

- Obie całki obliczane są po tej samej objętości są sobie równe. Równość ta jest słuszna w odniesieniu do dowolnej skończonej objętości; toteż wyrażenia podcałkowe są sobie równe:

$$d\boldsymbol{iv}\boldsymbol{J}_{prz} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}} d\boldsymbol{ivD}$$

- Po przeniesieniu na jedną stronę i zastosowaniu twierdzenia Gaussa w postaci różniczkowej otrzymamy:

$$\nabla \boldsymbol{J}_{prz} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \boldsymbol{D} = 0$$

3.2. Prąd przesunięcia

- Można symbol rozbieżności wynieść przed nawias, gdyż kolejność różniczkowania nie wpływa na wynik:

$$div(\boldsymbol{J}_{prz} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) = 0$$

- Wyrażenie to jest ogólniejszą postacią pierwszego prawa Kirchhoffa. Podstawiając za $\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E}$ oraz $\boldsymbol{J}_{prz}=\gamma \boldsymbol{E}$ otrzymamy:

$$div(\gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}) = 0$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia całkowitą gęstość prądu:

$$\gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{J}$$

3.2. Prąd przesunięcia

- Pole tego prądu jest wirowym lub mieszanym, ponieważ rozbieżność równa jest zeru. Linie gęstości całkowitego prądu nie mają dlatego ani początku ani końca, co znaczy, że zawsze tworzą krzywe zamknięte.

3.2. Prąd unoszenia

Wyobraźmy sobie szereg sześcianów o krawędzi 1m, ułożonych jeden za drugim wzdłuż linii prostej. W każdym z nich skupiony jest ładunek *ρ.* Jeżeli ładunki poruszają się z prędkością *v,* to w ciągu 1 sekundy przez powierzchnię 1m^2 prostopadłą do kierunku strumienia ładunków przepłynie ładunek *ρv.* Będzie to wartość gęstości prądu unoszenia:

$$\boldsymbol{J}_u = \rho \boldsymbol{v}$$

- Prąd całkowity w warunkach stanu ustalonego może być albo prądem przewodzenia, albo prądem unoszenia. W warunkach nieustalonych każdy z nich może istnieć z prądem przesunięcia co można wyrazić wzorem:

$$\rho \boldsymbol{v} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{J}$$

3.3. Prawo Joule'a-Lenza w postaci różniczkowej

- Moc odpowiadająca stratom cieplnym w przewodniku równa jest iloczynowi prądu i napięcia:

$$P = U\,I$$

- Jeżeli rozpatrzymy w środowisku przewodzącym element objętości dV to moc odpowiadająca stratom cieplnym wyniesie:

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}U\,\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}SE\,\mathrm{d}l = JE\,\mathrm{d}V$$

- Stąd: $\mathrm{d}P/\mathrm{d}V = JE = \gamma\,E^2 = J^2/\gamma$
- Moc odpowiadająca stratom cieplnym w objętości V można więc przedstawić w postaci

$$\mathrm{P} = \int_V \gamma E^2\,\mathrm{d}V$$

3.3. Prawo Joule'a-Lenza w postaci różniczkowej

- Załóżmy, że ładunek elementarny Δq zawarty w prostopadłościanie $\Delta \boldsymbol{l}$, Δs porusza się pod wpływem sił pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$. Siła poruszająca ładunek wynosi $\boldsymbol{E}\,\Delta q$. Praca wykonana na przesunięcie ładunku na odległość $\Delta \boldsymbol{l}$ wynosi:

$$\Delta W = \boldsymbol{E}\,\Delta q\,\Delta \boldsymbol{l}$$

Moc zatem jest równa:

$$\Delta P = \Delta W/\Delta t = \boldsymbol{E}\ \ \Delta q/\Delta t\,\Delta \boldsymbol{l}$$

Stosunek $\Delta q/\Delta t$ wyraża natężenie prądu przepływającego przez rozpatrywany prostopadłościan:

$$\Delta q/\Delta t = \Delta I = J_{prz}\,\Delta s$$

3.3. Prawo Joule'a-Lenza w postaci różniczkowej

- Podstawiając za: $\Delta V = \Delta l \; \Delta s$ otrzymamy:

$$\Delta P = \boldsymbol{E} \; \boldsymbol{I} \; \Delta V$$

A dzieląc obustronnie przez $\Delta \mathrm{V}$ i przechodząc do granicy gdy objętość dąży do zera, otrzymamy wyrażenie na przestrzenną gęstość mocy:

$$\lim \Delta P / \Delta V = \boldsymbol{E}\boldsymbol{I} = J^2/\gamma = \gamma \boldsymbol{E}^2$$

Równanie to jest prawem Joule'a w postaci różniczkowej.

Straty cieplne w ośrodku przewodzącym sa proporcjonalne do przewodności właściwej materiału γ i do kwadratu natężenia pola elektrycznego ***E****.*

3.4. Pierwsze prawo Kirchhoffa w postaci różniczkowej

- Rozpatrzmy pewną objętość wnętrza przewodnika otoczoną powierzchnią zamkniętą S: przez S_1 tej powierzchni ładunek dopływa do objętości; przez drugą część powierzchni S_2 taki sam ładunek opuszcza rozpatrywaną objętość. Strumień wektora gęstości prądu przewodzenia przez powierzchnię zamkniętą równy jest zeru:

$$\oint \boldsymbol{J}_{prz}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

- Stosując twierdzenie Ostrogradzkiego-Gaussa otrzymamy:

$$\oint \boldsymbol{J}_{prz}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_V div\boldsymbol{J}_{prz}\,\mathrm{d}V = 0$$

- Ponieważ całkę oblicza się po objętości skończonej, a równanie jest słuszne dla dowolnej, skończonej objętości, więc wyrażenie podcałkowe powinno się równać zeru

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}_{prz} = 0$$

3.4. Pierwsze prawo Kirchhoffa w postaci różniczkowej

- Równanie to stwierdza, że linie pola gęstości prądu przewodzenia nigdzie nie zaczynają się i nie kończą to znaczy że są zawsze zamknięte. Zależność ta wyraża w postaci różniczkowej cechę ciągłości prądu stałego. Jest to pierwsze prawo Kirchhoffa w postaci różniczkowej.

- Gęstość prądu przewodzenia nie ma źródeł.

- Jeżeli dywergencja gęstości prądu przewodzenia równa jest zeru, to linie wektora gęstości J prądu są liniami zamkniętymi, dlatego też te równanie nosi nazwę równania ciągłości dla prądu stałego.

- W obwodzie prądu zmiennego dywergencja wektora gęstości prądu zmiennego może być różna od zera.

3.4. Podstawowe prawa elektrotechniki w postaci całkowej

- Pole elektryczne wewnątrz przewodnika może mieć dwie składowe:
- składową E_{stat} wywołaną ładunkami elektrycznymi i odpowiadające polu elektrostatycznemu
- składową E_{in} (indukowane lub obce) powstałe w wyniku indukcji elektromagnetycznej lub procesom chemicznym. Pierwsze zachodzą w prądnicach drugie w chemicznych źródłach prądu. Całka liniowa z wektora natężenia pola indukowanego i obcego Ein wzdłuż pewnej linii AB nazywa się siłą elektromotoryczną (napięciem źródłowym) działającą na tej drodze

$$U_{źr} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \boldsymbol{E}_{in} \cdot d\boldsymbol{l}$$

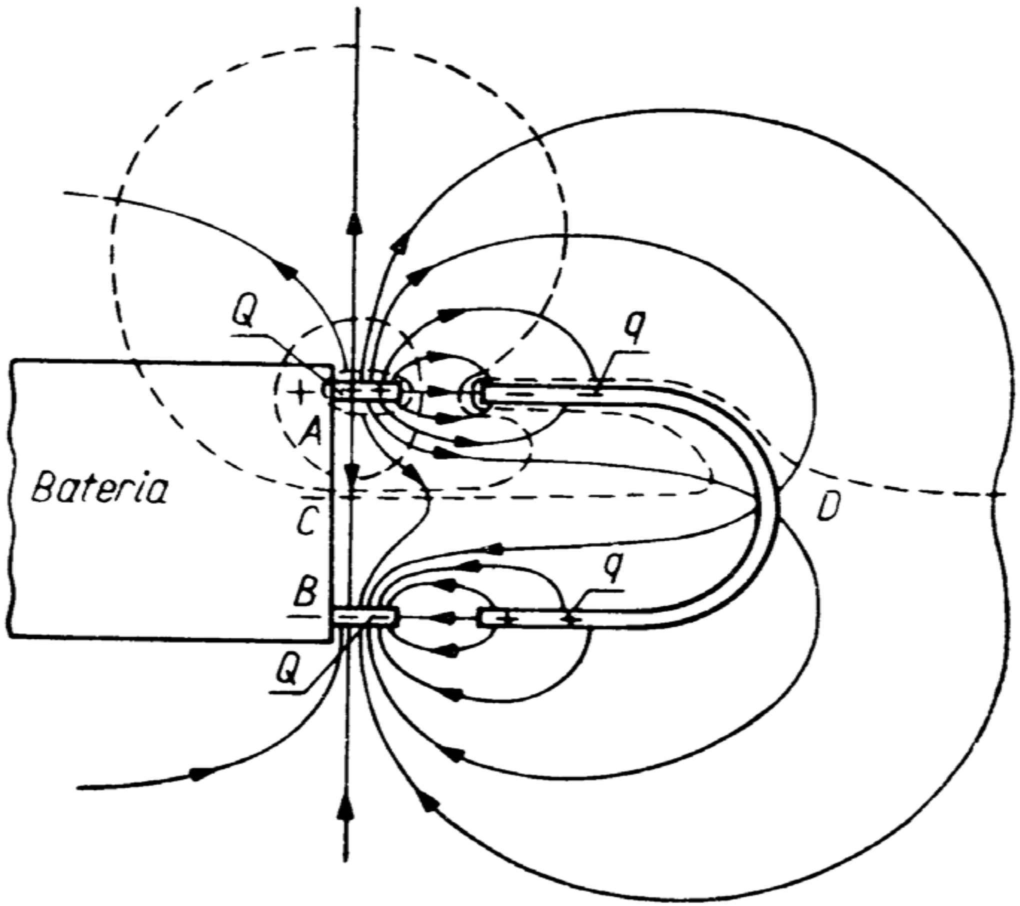
3.4. Podstawowe prawa elektrotechniki w postaci całkowej

- Całka liniowa z całkowitego wektora natężenia pola elektrycznego wzdłuż linii *AB* nazywana jest napięciem elektrycznym między punktami *A* i *B*

$$U = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \boldsymbol{E}_{in} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- Wartości tej i poprzedniej całki zależą od drogi całkowania.

3.4. Podstawowe prawa elektrotechniki w postaci całkowej



Niech będzie dany przykład w postaci źródła do którego jest dołączony przewód *D* o oporności właściwej *γ*.

Pole elektryczne w pobliżu b biegunów baterii źródła przedstawione jest na rysunku.

3.4. Podstawowe prawa elektrotechniki w postaci całkowej

- Przy zbliżaniu przewodu *D* do zacisków źródła w tych elementach przemieszczają się ładunki. Ładunki dążą do wzajemnego skompensowania się. Gdy przewód zetknie się z zaciskami źródła, powstaję obwód ustalonego prądu przewodzenia. W przewodzie *D* powstanie natężenie pola E_{wew} przesuwające ładunki swobodne od *A* do *B*.

$$U_R = \int_A^B \boldsymbol{E}_{wew} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B \frac{I_{prz}}{\gamma} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- W przypadku gdy pole jest równomierne i: $I=\mathbf{J}_{prz}s$,gdzie s- przekrój przewodnika otrzymamy *prawo Ohma w postaci całkowej*

$$U_R = I\int_A^B \frac{d\boldsymbol{l}}{\gamma s} \cdot$$

3.4. Podstawowe prawa elektrotechniki w postaci całkowej

- Całkując w równanie Joule'a granicach całej objętości przewodnika otrzymujemy prawo Joule'a w postaci całkowej

$$P = I^2 \int_A^B \frac{d\boldsymbol{l}}{\gamma\, s}\,.$$

- Mnożąc obie strony wyrażenia: $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{stat}+\boldsymbol{E}_{in}$ przez d$\boldsymbol{l}$ i całkując po całej długości obwodu elektrycznego włącznie ze źródłem otrzymujemy sumę napięć źródłowych działajacych w sieci równą sumie spadków napięć na oporach:

$$\oint_l \boldsymbol{E}_{stat} \cdot d\boldsymbol{l} + \oint_l \boldsymbol{E}_{in} \cdot d\boldsymbol{l} = I\;R = I \oint_l \frac{d\boldsymbol{l}}{\gamma\, s}$$

3.4. Podstawowe prawa elektrotechniki w postaci całkowej

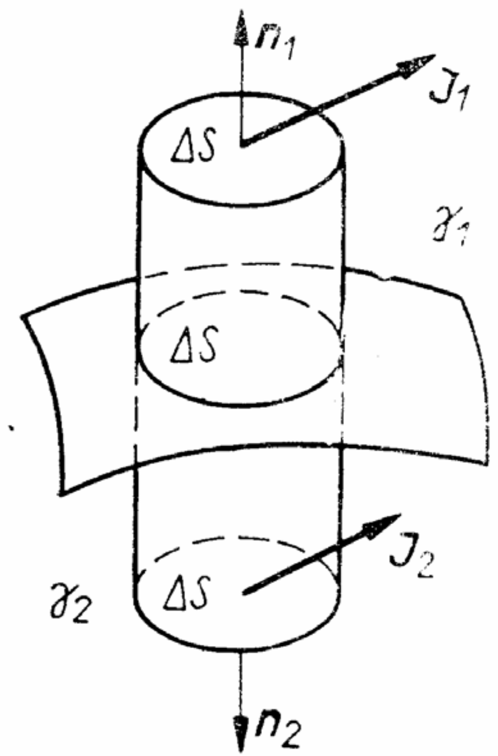
- Pole elektrostatyczne jest bezwirowe więc pierwsza całka z lewej strony, będąca cyrkulacją wektora $\boldsymbol{E}_{stat}$ jest równa zero więc:

$$U_{\acute{z}r} = \oint_l \boldsymbol{E}_{ind} \cdot d\boldsymbol{l} = I \oint_l \frac{d\boldsymbol{l}}{\gamma\, s}$$

- Równanie to jest *drugim prawem Kirchhoffa w postaci całkowej.*

3.5. Warunki brzegowe

- Rozpatrzmy dwa środowiska przewodzące o przewodnościach właściwych wynoszących odpowiednio γ_1 i γ_2.



- Ponieważ rozpatrywana powierzchnia jest zamknięta, to prąd przepływający przez tą powierzchnię jest równy zeru.
- Prąd jest równy strumieniowi wektora gęstości prądu i wynosi:

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 = \int_{\Delta S_1} \boldsymbol{J}_1 \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\Delta S_2} \boldsymbol{J}_2 d\boldsymbol{S} = \int_{S_{boczna}} \boldsymbol{J} d\boldsymbol{S}$$

3.5. Warunki brzegowe

- Jeżeli wysokość walca zmniejszymy tak, aby powierzchnia $\Delta S_1 = \Delta S_2$ była powierzchnią graniczną między dwoma środowiskami, oraz uwzględniając fakt, że dla małych powierzchni ΔS wektor $\boldsymbol{J}$ można traktować jako taki sam we wszystkich punktach powierzchni, wówczas otrzymamy:

$$J_{1n}\Delta S - J_{2n}\Delta S = 0$$

- Skracając przez ΔS otrzymamy warunek brzegowy

$$\boldsymbol{J}_{1n} = \boldsymbol{J}_{2n}$$

- Oznacza to , że składowa normalna wektora gęstości prądu na granicy dwóch środowisk jest ciągła.

3.5. Warunki brzegowe

Jeżeli wektory ***J*** i ***E***
tworzą kąt α_1
z normalną do
powierzchni granicznej
w pierwszym środowisku,
a kąt α_2 to:

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$$

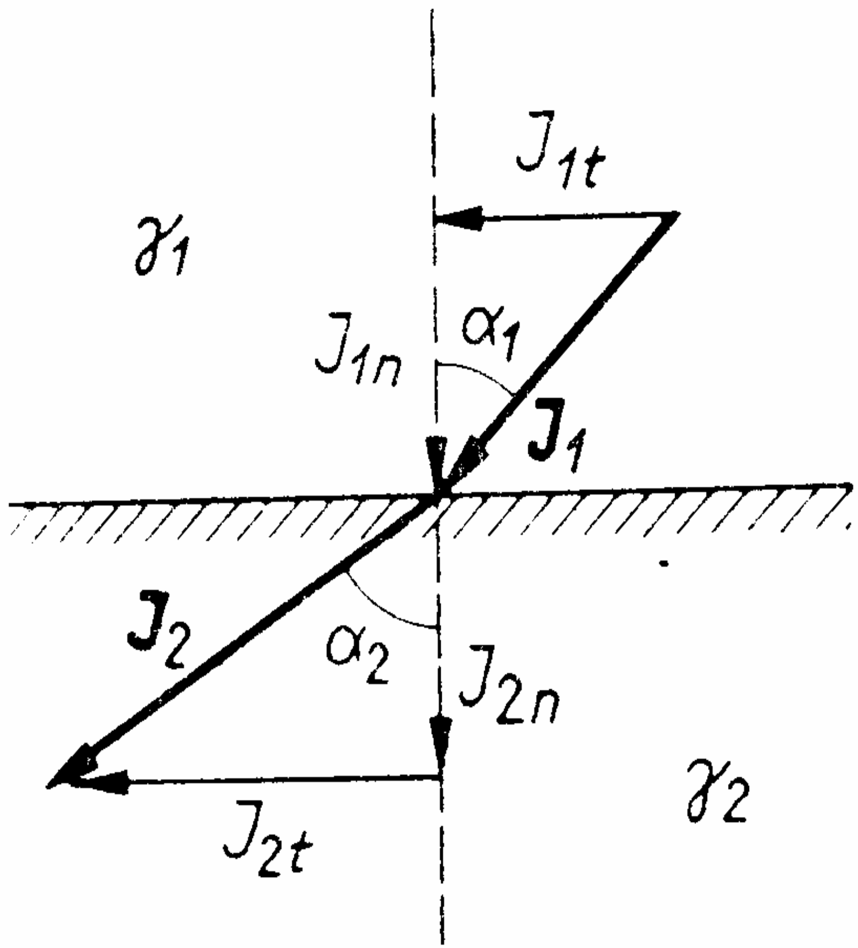
$$J_1 \cos \alpha_1 = J_2 \cos \alpha_2$$

stąd:

$$J_1 = \gamma_1 E_1; \quad J_2 = \gamma_2 E_2$$

oraz:

$$\gamma_1/\gamma_2 = \mathrm{tg}\ \alpha_1/\alpha_2$$



3.6 Analogia między polem elektrycznym prądu stałego i polem elektrostatycznym

- W obszarze w którym nie ma SEM zewnętrznych, pole prądu stałego jest polem potencjalnym.
- Potencjał i natężenie pola elektrycznego związane jest zależnością: $\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$
- Ponieważ prąd stały na własności ciągłości to pole nie ma źródeł $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0$
- Zgodnie z prawem Ohma $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$

W środowisku jednorodnym $\gamma = \mathrm{const}$, stąd

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0$$

podstawiając do powyższej zależności $\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$

otrzymujemy równanie Laplace'a $\underline{\nabla^2 \varphi = 0}$

3.6 Analogia między polem elektrycznym prądu stałego i polem elektrostatycznym

- Pole elektrostatyczne w dielektryku w przypadku braku ładunków swobodnych objętościowych opisane jest również równaniem Laplace'a.

- Jeżeli dwa obszary jednakowo ograniczone:

  przewodzący (bez SEM zewnętrznych)

  z dielektrykiem (bez ładunków swobodnych)

  mają jednakowy rozkład potencjału, to także wewnątrz każdego z tych obszarów rozkład potencjału jest jednakowy.

  Dzięki tym analogiom można posługiwać się tymi samymi zależnościami przy obliczaniu pola elektrostatycznego i pola elektrycznego prądu stałego, zastępując przy tym pojemność przewodnością a przenikalność elektryczną zastępując przewodnością właściwą.

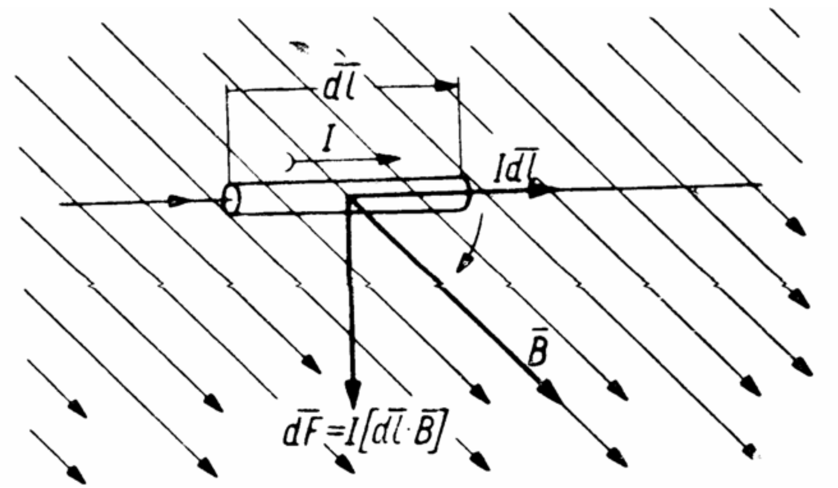
4. Pole magnetyczne stałe w czasie

- Wielkością która charakteryzuje pole magnetyczne jest wektor indukcji magnetycznej ***B***. Znając wartość i kierunek wektora indukcji magnetycznej B można ustalić własności pola magnetycznego i zjawiska zachodzące w polu magnetycznym.

  Rozpatrzmy przewodnik z prądem I umieszczony w polu magnetycznym o indukcji magnetycznej ***B***.

4. Pole magnetyczne stałe w czasie

- Indukcja magnetyczna $\boldsymbol{B}$ jest określoną na podstawie prawa Ampera dotyczącego wzajemnego oddziaływanie d$\boldsymbol{F}$ liniowego elementu prądu $I \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ i badanego pola.



Kierunek działania siły d$\boldsymbol{F}$ jest prostopadły do $\boldsymbol{B}$ i d$\boldsymbol{l}$ a wartość wynika z iloczynu: $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,[\mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{B}] = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$

4. Pole magnetyczne stałe w czasie

- Siła ***F*** zależy od wartości prądu, wymiarów przewodnika i jego położenia w polu magnetycznym. Mierząc siłę ***F***, prąd ***I***, znając długość przewodnika i jego usytuowanie w polu magnetycznym, można wyznaczyć wektor indukcji ***B***.
- Siła działająca na liniowy element prądu może być określona zależnością:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}\,(\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$$

Dokonując całkowania tego równania można obliczyć siłę działającą na cały przewodnik.

- Każdy prąd elektryczny wytwarza wokół siebie pole magnetyczne. W próżni, związek ten może być przedstawiony w postaci różniczkowej następująco:

$$\mathrm{d}\,B_0 = \frac{\mu_0\,(\boldsymbol{J} \times \mathbf{1}_r)\,\mathrm{d}\,V}{4\pi r^2}$$

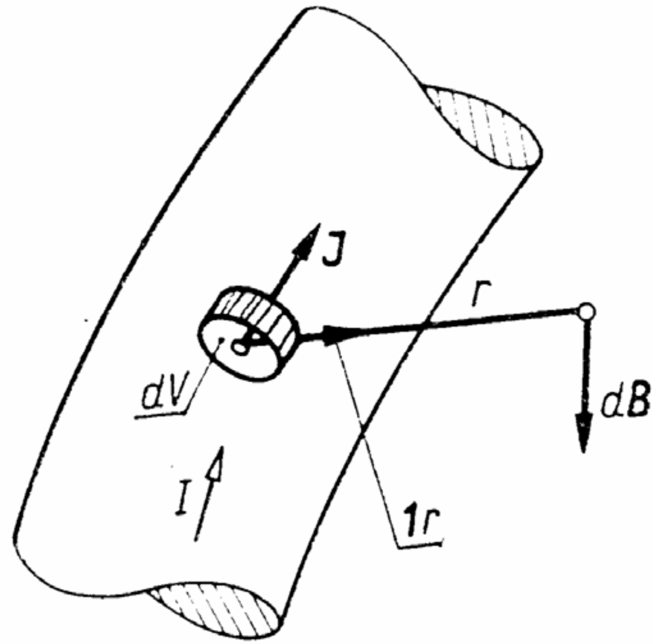
4. Pole magnetyczne stałe w czasie

Gdzie: $\boldsymbol{J}$ – wektor gęstości prądu w przewodniku

dV – elementarna objętość przewodnika

r – odległość od elementu objętości dV do pktu w którym wyznaczamy wektor indukcji $\boldsymbol{B}$

μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni $4\pi 10^{-7}$ H/m



- Indukcję magnetyczną B mierzymy w teslach [T] lub w mniejszych jednostkach gausach [Gs]

1 [T] = 104 [Gs]

4. Pole magnetyczne stałe w czasie

- Jeżeli wymiary przekroju poprzecznego przewodnika sa małe w porównaniu z jego długością i odległością od punktu obserwacji to można napisać:

$$(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{1}_r)dV = (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{1}_r)(\boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{l}) = [(\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{S})d\boldsymbol{l}] \times \boldsymbol{1}_r = I(d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{1}_r)$$

Zatem

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{B}_0 = \frac{\mu_0 I(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{1}_r)}{4\pi r^2}$$

A całkując to wyrażenie stronami otrzymamy:

$$\boldsymbol{B}_0 = \oint_L \frac{\mu_0 I(\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{1}_r)}{4\pi r^2}$$

L-jest obwodem w którym płynie prąd stały

4. Pole magnetyczne stałe w czasie

- Jeżeli obwód z prądem umieszczony jest w dowolnym środowisku materialnym to wartość indukcji magnetycznej jest równa ze współczynnikiem przenikalności magnetycznej względnej μ_r. $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \mu_r$

$$\boldsymbol{B} = \mu_r \boldsymbol{B}_0 = \oint_L \frac{\mu_0 \mu_r I(\boldsymbol{J} \times \mathbf{1}_r)}{4\pi r^2}$$

- Pole magnetyczne można scharakteryzować przy pomocy wektora natężenia pola magnetycznego

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}$$

$\mu = \mu_0 \mu_r$ - przenikalność magnetyczna bezwzględna

4. Pole magnetyczne stałe w czasie

- Chcąc określić działanie magnetyczne prądu I niezależnie od ośrodka wprowadzono pew ną wielkość wektorową ***H=B/μ*** nazywaną natężeniem pola magnetycznego.

$$\boldsymbol{H} = \oint_L \frac{I(\boldsymbol{J} \times \mathbf{1}_r)}{4\pi r^2}$$

- Wyrażenie to przedstawia prawo Biota-Savarta-Laplace'a w postaci całkowej.
- Linia w przestrzeni, do której wektor H jest styczny w dowolnym punkcie nazywa się linią natężenia pola magnetycznego.
- Natężenie pola magnetycznego mierzymy w amperach na metr [A/m] lub w ersztedach [Oe]

$$1[A/m] = 4\pi 10_{-3}\ [Oe]$$

4.1. Strumień magnetyczny

- Całka powierzchniowa wektora indukcji magnetycznej B przez powierzchnię S jest strumieniem wektora indukcji magnetycznej. Jest on wielkością skalarną.

$$\Phi = \int_{S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$$

- Strumień magnetyczny mierzymy w weberach [Wb] lub mniejszą jednostką jest makswel [Mx]

$$1[\mathrm{Wb}] = 10^{8}[\mathrm{Mx}]$$

Jeżeli powierzchnia S jest prostopadła do wektora indukcji magnetycznej B i pole jest równomierne to:

$$\Phi = BS$$

- Strumień magnetyczny przenikający przez powierzchnię zamkniętą jest zawsze równy zeru.

4.2. Ciągłość linii indukcji magnetycznej

- Liczne doświadczenia pozwalają stwierdzić, że całkowity strumień magnetyczny obliczony po powierzchni zamkniętej jest zawsze równy zeru.

$$\oint_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{s} = 0$$

- Stosując tw. Ostrogradzkiego-Gaussa otrzymamy:

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V div\boldsymbol{B} dV$$

$$\int_V div\boldsymbol{B} dV = 0$$

- Ponieważ całka jest równa zero to i wyrażenie podcałkowe jest równe zero. div***B*** = 0 Co oznacza, że indukcja ***B*** nie ma rozbieżności, linie ind. magn. są zawsze ciągłe i tworzą obiegi zamknięte. Linie te nigdzie się nie zaczynają i nigdzie nie kończą.
- Równanie div***B*** = 0 nazywa się równaniem ciągłości.

4.3. Prawo przepływu

- Podstawowym prawem które charakteryzuje własności pola magnetycznego jest prawo przepływu. Ustala ono związek między natężeniem pola magnetycznego i prądem.

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k = I$$

- Dodatni zwrot prądu związany jest ze zwrotem drogi całkowania zgodnie ze zwrotem śruby prawoskrętnej. Jeżeli gęstość prądu oznaczymy przez ***J***, to prąd przechodzący przez powierzchnię *S* ograniczoną krzywa *L* wynosi:

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

4.3. Prawo przepływu

- Korzystając z twierdzenia Stokesa możemy napisać:

$$\oint_L H \cdot dl = \int_S rot\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S}$$

skąd wynika

$$\int_S rot\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S}$$

Ponieważ powyższe równanie jest spełnione przy dowolnych granicach całkowania S, to funkcje pod znakiem całki są sobie równe.

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

4.3. Prawo przepływu

- Otrzymane równanie przedstawia prawo przepływu w postaci różniczkowej nazywane *pierwszym równaniem Maxwella*. Równanie to wskazuje, że pole magnetyczne jest polem wirowym. Korzystając z tego równania można wyznaczyć pole magnetyczne. W obszarze nie obejmującym prądów (na zewnątrz przewodników z prądem)

$$\mu = \text{const}; \qquad \boldsymbol{J} = 0; \qquad \text{rot}\, \boldsymbol{H} = 0; \qquad \text{div}\, \mu\boldsymbol{H} = 0$$

Równania są analogiczne do równań pola elektrostatycznego w odniesieniu do środowisk objętościowych, dlatego pole magnetyczne w obszarze nie obejmującym prędów, można tarktować jako pole potencjalne, scharakteryzowane potencjałem skalarnym pola magnetycznego:

$$\text{grad}\varphi_m = -H$$

4.3. Potencjał wektorowy pola magnetycznego

- Ponieważ pole wektora B jest polem wirowym albo mieszanym, więc istnieje w nim potencjał wektorowy A określony zależnością:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$$

Ponieważ przedstawione wyrażenie określa potencjał wektorowy w sposób niejednoznaczny należy jeszcze zanć dywergencję wektora ***A***, którą przyjmujemy za równą zeru (div***A***=0).

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = = 0$$

Potencjał wektorowy mierzy się w woltosekundach na metr [Vs/m].

4.3. Potencjał wektorowy pola magnetycznego

- Podstawiając potencjał wektorowy do wzoru na strumień magnetyczny możemy określić jego zależność od potencjału magnetycznego (z tw: Ostrogr.-Stokesa)

$$\Phi = \int_V div\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{V} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- Zależność ta pozwala na obliczenie strumienia magnetycznego i indukcyjności własnej lub wzajemnej za pomocą całki liniowej potencjału wektorowego po drodze zamkniętej. Podstawiając wartość na indukcję magnetyczna i dokonując przekształceń można otrzymać:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\eta I}{4\pi} \oint_l \frac{d\boldsymbol{l}}{r} = \frac{\eta}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{J} \cdot dV}{r} =$$

4.4. Równania różniczkowe pola magnetycznego

- Równanie na potencjał wektorowy pola magnetycznego można zastąpić trzema równaniami, z których każde wiąże ze sobą składowe wektorów A i J w kierunku osi układu współrzędnych. W układzie współrzędnych prostokątnych równania te przybierają postać:

$$A_x = \int_V \frac{\mu J_x \cdot dV}{4\pi r} \qquad A_y = \int_V \frac{\mu J_y \cdot dV}{4\pi r} \qquad A_z = \int_V \frac{\mu J_z \cdot dV}{4\pi r}$$

- Równania te można rozpatrywać jako ogólne rozwiązania równań Poissona i Laplace'a w przypadku pola magnetycznego. Mnożąc obie strony równań przez odpowiednie wektory jednostkowe ***i***, ***j***, ***k*** i dodając stronami otrzymamy: $\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$ lub 0. Potencjał wektorowy spełnia równania Poissona i Laplace'a i to ułatwia posługiwanie się analogiami z rozwiązaniami otrzymanymi dla pola elektrostatycznego.

4.5. Pierwsze równanie Maxwella

- Dla zależności na potencjał wektorowy zastosujmy podstawienia i przekształcenia (rot rot$\boldsymbol{A}$=grad div$\boldsymbol{A}$-$\nabla^2\boldsymbol{A}$) otrzymując zależność nazywaną pierwszym równaniem Maxwella: $\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$
- Podstawiając wyrażenia na całkowitą wartość prądu:

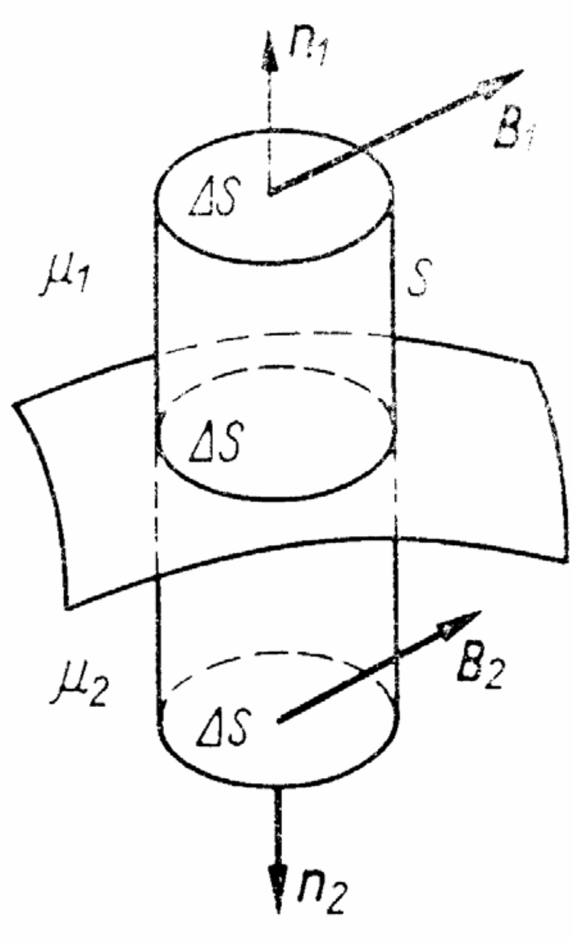
$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- *W dowolnym punkcie przestrzeni, w którym istnieje prąd przewodzenia lub prąd przesunięcia (bądź oba razem) istnieje wirowe pole magnetyczne.*

(Pierwsze równanie Maxwella rozciąga się również na prąd unoszenia)

4.6. Warunki brzegowe w polu magnetycznym

- Na granicy dwóch środowisk wektory charakteryzyjące pola magnetyczne ***A*** i ***B*** musza spełniać określone warunki nazywane *warunkami brzegowymi.*
- Jeżeli rozpatrzymy zamknięta powierzchnię walcową *S*, która jest poprowadzona jak na rysunku. Powierzchnie Δ*S* są nieskończenie małe i dlatego wektor ***B*** ma taką samą wartość we wszystkich punktach (można tak założyć). Strumień wektora B przez ta powierzchnię zamkniętą S jest równy zero.



4.6. Warunki brzegowe w polu magnetycznym

- Z pierwszego równania Maxwella wirowość wektora natężenia prądu równa jest zeru i stąd składowa styczna na granicy obu środowisk powinna być taka sama:

$$H_{t1} = H_{t2}$$

- Wskutek ciągłości linii indukcji magnetycznej składowe wektora B normalne do powierzchni granicznej powinny być równe po jednej i drugiej stronie granicy: $B_{n1} = B_{n2}$