# Teoria Pola Elektromagnetycznego

**Wykład 4**

Pole elektromagnetyczne

**23.06.2006**

**Stefan Filipowicz**

# 4. Pole elektromagnetyczne

## 4.1. Prąd całkowity

- Prąd elektryczny w środowisku przewodzącym okreslono jako uporządkowany ruch ładunków elektrycznych zachodzący pod wpływem pola elektrycznego. Prąd taki nazwano prądem przewodzenia. Gęstość tego prądu jest proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$ i zależy od przewodności właściwej środowiska.

$$\boldsymbol{J} = \gamma\, \boldsymbol{E}$$

- Jeżeli ciała naładowane lub cząstki poruszają się w środowisku nieprzewodzącym lub w próżni z prędkością $v$, to cząstki te tworzą prąd zwany prądem unoszenia (prądem konwekcyjnym). Gęstość prądu unoszenia $\boldsymbol{J}_U$ jest proporcjonalna do gęstości objętościowej ładunków $\rho$ i zależy od prędkości poruszających się cząstek:

$$\boldsymbol{J}_U = \rho\, \boldsymbol{v}$$

# 4. Pole elektromagnetyczne

## 4.1. Prąd całkowity

- W cząsteczkach dielektryka które zostały wprowadzone do zewnętrznego pola elektrycznego, ładunki z nimi związane będą się przemieszczały pod wpływem sił pola tworząc prąd polaryzacji. Gęstość prądu polaryzacji $\boldsymbol{J}_{pol}$ jest proporcjonalna do pochodnej wektora poraryzacji względem czasu:

$$\boldsymbol{J}_{pol} = \partial \boldsymbol{P} / \partial t$$

- W przypadku środowisk w których wektor polaryzacji jest proporcjonalny do natężenia pola elektrycznego $\boldsymbol{P}_1 = \varepsilon_0 \aleph \boldsymbol{E}$**,** gęstość prądu polaryzacji wynosi:

$$\boldsymbol{J}_{pol} = \varepsilon_0 \aleph \, \partial \boldsymbol{E} / \partial t$$

- Wszystkie trzy omówione rodzaje prądu mówią o przemieszczaniu się ładunków elektrycznych. Każdemu z tych prądów towarzyszy pole magnetyczne.

# 4. Pole elektromagnetyczne

## 4.1. Prąd całkowity

- Maxwell także nazwać prądami elektrycznymi prądy, które powstaną w próżni pod wpływem zmian pola elektrycznego, gdyż temu przypadkowi również towarzyszy pole magnetyczne. Prąd ten nazywamy prądem przesunięcia w próżni. Gęstość tego prądu $\boldsymbol{J}_{\text{przes}}$ jest proporcjonalna do prędkości zmian natężenia pola elektrycznego:

$$\boldsymbol{J}_{przes} = \varepsilon_0\, \partial \boldsymbol{E} / \partial t$$

- Prąd przesunięcia w próżni różni się od innych prądów tym, że nie powoduje on powstawania strat na ciepło.
- Prądy przewodzenia i unoszenia mogą występować zarówno w polach magnetycznych stałych jak i zmiennych w czasie.
- Prądy przesunięcia i polaryzacji mogą występować w polu elektrycznym zarówno stałym jak i zmiennym w czasie. Prądy polaryzacji i przesunięcia mogą występować w próżni tylko w przypadku zmiennego pola elektrycznego.

# 4. Pole elektromagnetyczne
## 4.1. Prąd całkowity

- W ten sposób prądem elektrycznym nazywamy dwa różne zjawiska: ruch ładunków elektrycznych oraz zmianę w czasie pola elektrycznego. Podstawową własnością każdego z tych prądów jest zdolność wytwarzania pola magnetycznego.
- Prądem całkowitym nazywamy całokształt wszystkich zjawisk, któremu towarzyszy pole magnetyczne. W przypadku ogólnym gęstość prądu całkowitego równa jest sumie gęstości prądu przewodzenia, unoszenia, polaryzacji i przesunięcia w próżni:

$$\boldsymbol{J}_{\text{całk}} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{\text{u}} + \boldsymbol{J}_{\text{pol}} + \boldsymbol{J}_{\text{o przes}}$$

Sumę prądu polaryzacji i prądu przesunięcia w próżni nazywamy prądem przesunięcia w dielektryku. Gęstość prądu przesunięcia w dielektryku wynosi:

$$\boldsymbol{J}_{\text{przes}} = \boldsymbol{J}_{\text{o przes}} + \boldsymbol{J}_{\text{pol}} = \varepsilon_0\,(1+\aleph)\partial \boldsymbol{E} / \partial t = \varepsilon\, \partial \boldsymbol{E} / \partial t = \partial \boldsymbol{D} / \partial t$$

# 4. Pole elektromagnetyczne

## 4.1. Prąd całkowity

- Prądy przesunięcia maja własność rozprzestrzeniania się w dielektryku tak, jak prądy przewodzenia mają własność rozprzestrzeniania się w przewodniku.
- W dalszej części nie będziemy uwzględniać prądów unoszenia. Dlatego prąd całkowity będziemy rozumieli jako sumę prądu przewodzenia i prądu przesunięcia. W takim przypadku gęstość prądu całkowitego wynosi:

$$\boldsymbol{J}_{całk} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{przes} = \gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon\, \partial \boldsymbol{E} / \partial t$$

Prąd całkowity może występować zarówno w środowiskach przewodzących jak i nieprzewodzących.

W środowisku dobrze przewodzącym prądy przewodzenia są znacznie większe od prądów przesunięcia i wobec tego można prądy przesunięcia nie uwzględniać.

W dielektryku o małych stratach jest odwrotnie – prądy przesunięcia są znacznie większe od prądów przewodzenia i tych prądów można nie uwzględniać

# 4.2. Dywergencja gęstości prądu przewodzenia

- Prąd stały może płynąć tylko w obwodzie zamkniętym. Linie gęstości wektora prądu stałego są liniami ciągłymi i div ***J*** = 0. Strumień wektora gęstości prądu pr5zez dowolną powierzchnię zamkniętą musi być zawsze równy zero. Ładunek znajdujący się w objętości ograniczonej tą powierzchnią zamknięta jest niezmienny w czasie.
- Prądy przemienne mogą występować w obwodach tzw. otwartych, które stanowią przerwę dla prądu stałego (np. obwód z kondensatorem). Dlatego w polach przemiennych, mogą płynąć prądy przewodzenia nawet w obwodach otwartych. W miejscu gdzie kończą się linie wektora gęstości prądu przewodzenia J, mogą gromadzić sie ładunki; strumień wektora gęstości prądu przewodzenia przez powierzchnię zamkniętą nie musi się równać zero.

# 4.2. Dywergencja gęstości prądu przewodzenia

- Załóżmy, że w objętości V ograniczonej powierzchnią S umieszczony jest ładunek q, którego gęstość objętościowa wynosi ρ. Jeżeli przez powierzchnię S przechodzi prąd przewodzenia I, to ładunek q będzie zmniejszał się i prąd:

$$\boldsymbol{i} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

- Wyrażając prąd za pomocą gęstości prądu przewodzenia J otrzymujemy postać całkową równania ciągłości prądu:

$$\oint_S \boldsymbol{J} d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

# 4.2. Dywergencja gęstości prądu przewodzenia

- Poprzednie równanie można przedstawić w postaci różniczkowej, wyrażając ładunek q w zależności od gęstości objętościowej:

$$q = \int_V \rho dV$$

- Oraz przekształcając strumień wektora gęstości J zgodnie z twierdzeniem Gaussa Ostrogradzkiego otrzymamy:

$$\oint_S \boldsymbol{J} d\boldsymbol{S} = \oint_V div \boldsymbol{J} dV$$

# 4.2. Dywergencja gęstości prądu przewodzenia

- Zaś po uwzględnieniu $\oint_S \boldsymbol{J} d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}$

- Otrzymamy: $$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V div\boldsymbol{J} dV$$

- Ponieważ powierzchnia S, a zatem i ograniczona ta powierzchnią objętość V, były wybrane dowolnie, to otrzymana zależność nie zależy od granic całkowania i dlatego funkcje podcałkowe powinny być sobie równe, czyli:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = div\boldsymbol{J}$$

# 4.3. Ciągłość prądu całkowitego

- Wykażemy teraz, ze prąd całkowity jest ciągły oraz, że dywergencja gęstości prądu całkowitego zawsze jest równa zero.
- Ponieważ gęstość prądu całkowitego jest równa sumie gęstości prądu przewodzenia i gęstości prądu przesunięcia to możemy napisać:

$$\boldsymbol{J}_{calk} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{przes} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

- Zatem:

$$div\boldsymbol{J}_{calk} = div\boldsymbol{J} + div\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

# 4.3. Ciągłość prądu całkowitego

- Ponieważ współrzędne przestrzenne nie są funkcjami czasu, można zmienić kolejność obliczania dywergencji i różniczkowania wzg. czasu:

$$div\boldsymbol{J}_{calk} = div\boldsymbol{J} + \frac{\partial(div\boldsymbol{D})}{\partial t}$$

- A zgodnie z tw. Gaussa w postaci różniczkowej divD = ρ stąd mamy:

$$div\boldsymbol{J}_{calk} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

# 4.3. Ciągłość prądu całkowitego

- Co udowadnia, że dywerg. gęstości prądu całkowitego jest zawsze równa zero a to wskazuje, że wektor prądu całkowitego przedstawia sobą wektor solenoidalny; linie strumienia nie mają początku ani końca.
- Pole tego prądu jest wirowym lub mieszanym, ponieważ rozbieżność równa jest zeru.

# 4.3. Ciągłość prądu całkowitego

- Można symbol rozbieżności wynieść przed nawias, gdyż kolejność różniczkowania nie wpływa na wynik:

$$div(\boldsymbol{J}_{prz} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) = 0$$

- Wyrażenie to jest ogólniejszą postacią pierwszego prawa Kirchhoffa. Podstawiając za $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ oraz $\boldsymbol{J}_{prz}=\gamma\boldsymbol{E}$ otrzymamy:

$$div(\gamma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}) = 0$$

Wyrażenie w nawiasie przedstawia całkowitą gęstość prądu:

$$\gamma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{J}$$

# 4.2. Dywergencja gęstości prądu przewodzenia

- Pole tego prądu jest wirowym lub mieszanym, ponieważ rozbieżność równa jest zeru. Linie gęstości całkowitego prądu nie mają dlatego ani początku ani końca, co znaczy, że zawsze tworzą krzywe zamknięte.

# 4.4. Pierwsze równanie Maxwella

Pierwsze równanie Maxwella wyraża prawo przepływu w postaci różniczkowej:

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{calk} = \int \boldsymbol{J}_{calk} \cdot d\boldsymbol{S}$$

- Przekształcając zgodnie z twierdzeniem Stokesa cyrkulację wektora H otrzymujemy:

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S rot\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S}$$

- Można więc napisać równanie:

$$\int_S rot\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J}_{calk} \cdot d\boldsymbol{S}$$

- Stąd: $rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{calk}$

# 4.4. Pierwsze równanie Maxwella

- Równanie to nosi nazwę pierwszego równania Maxwella. Można go przedstawić w innej postaci uwzględniając zależności na gęstość prądu przewodzenia i gęstość prądu przesunięcia:

$$\boxed{rot\boldsymbol{H} = \gamma\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}$$

- W przypadku środowisk o stałej przenikalności elektrycznej można to zapisać ($\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_r = const$):

$$\boxed{rot\boldsymbol{H} = \gamma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}$$

- Sens Fizyczny tego równania oznacza, że pole magnetyczne bezźródłowe wytworzone jest zarówno prądami przewodzenia jak i polem elektrycznym zmiennym w czasie.

# 4.4. Pierwsze równanie Maxwella

- Dla dielektryków idealnych o przewodności właściwej $\gamma=0$ otrzymamy:

$$\boxed{rot\boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}$$

- Pierwsze równanie Maxwella ustala zależność między zmieniającym się w czasie natężeniem pola elektrycznego, a zmieniającym się w przestrzeni natężeniem pola magnetycznego oraz wskazuje, że pole magnetyczne znajduje się w ciągłym ruchu. Inaczej: równanie Maxwella określa ilościowy wiązek między polem magnetycznym i wywołującym je polem elektrycznym oraz szybkością zmian w czasie tego pola.
- Wiadomo, że dywergencja rotacji równa jest tożsamościowo zeru, div$\boldsymbol{H}$=0. Dlatego i div $\boldsymbol{J}_{całk}$=0.

# 4.5. Drugie równanie Maxwella

- Drugie równanie Maxwella wyraża prawo indukcji elektromagnetycznej w postaci różniczkowej. Zgodnie z tym prawem powstaje w zwoju SEM (siła elektromotoryczna) przy zmianie skojarzonego z tym zwojem strumieniem magnetycznym *Φ* czyli:

$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,t}}$$

- Maxwell uogólnił to prawo wskazując, że zmieniający się w czasie strumień magnetyczny wytwarza pole elektryczne nawet w przypadku gdy jest brak jest uzwojenia.

# 4.5. Drugie równanie Maxwella

- W polu o indukcji magnetycznej ***B*** strumień magnetyczny przenikający dowolną powierzchnię ***S*** ograniczoną krzywą
- zamkniętą *L* wynosi:

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

- Zaś SEM wywołana przez strumień zmienny w czasie:

$$e = \int_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- Jeśli powierzchnia S oraz obwód L są nieruchome wtedy:

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t} = -\int_s \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}$$

# 4.5. Drugie równanie Maxwella

- Dodatni zwrot obiegu obwodu (linii zamkniętej) *L* i dodatni zwrot normalnej do powierzchni *S* obieramy tak, aby odpowiadały śrubie prawoskrętnej. Wprowadziłem tu pochodne cząstkowe, gdyż SEM może powstać nie tylko wskutek zmian w czasie pola magnetycznego ale także wskutek ruchu lub odkształcenia obwodu.
- Stosując tw. Stokesa możemy przekształcić cyrkulację wektora ***E*** w następujący sposób:

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S rot\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- Zatem: $\int_S rot\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ stąd: $\boxed{rot\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}$

# 4.5. Drugie równanie Maxwella

- Ostatnie równanie stanowi drugie równanie Maxwella.
- Należy przypomnieć, że w polu elektrostatycznym, które jest polem bezwirowym mamy rot E = 0. Linie wektora natężenia pola E są zawsze liniami niezamkniętymi, zaczynają się na ładunkach dodatnich a kończą na ładunkach ujemnych.
- W odniesieniu do środowisk o stałej przenikalności magnetycznej, drugie równanie Maxwella otrzyma postać:

$$\boxed{rot\boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}}$$

- Drugie równanie Maxwella ustala zależność między zmiennym w czasie polem magnetycznym i zmieniającym się w przestrzeni natężeniem pola elektrycznego

# 4.6. Układ podstawowych równań pola elektromagnetycznego

- Pole elektromagnetyczne charakteryzujemy za pomocą czterech wektorów ***E, D, B, H***. W przypadku środowisk o przenikalnościach elektrycznym i magnetycznych stałych, wektory te związane są zależnościami:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r \boldsymbol{E} \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \, \mu_r \boldsymbol{H}$$

Wobec tego przy wyznaczaniu pól wystarczy znać tylko dwa wektory. Zazwyczaj wyznacza się wektory ***E*** oraz ***H*** z równań Maxwella:

$$\boxed{rot\boldsymbol{H} = \gamma \boldsymbol{E} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}} \qquad \boxed{rot\boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}}$$

# 4.6. Układ podstawowych równań pola elektromagnetycznego

- Jednak dla jednoznacznego wyznaczenia wektorów ***E*** i ***H*** wspomniane równania sa niewystarczające gdyż wektor rotacji nie jest jednoznacznie określony. Dlatego trzeba mieć jeszcze dywergencję wektorów ***E*** i ***H*** .
- Zatem układ podstawowych równań pola elektromagnetycznego w odniesieniu do środowisk o stałej przenikalności elektrycznej $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = const$ i magnetycznej $\mu = \mu_0 \mu_r = const$ i przewodności właściwej (konduktywności) $\gamma = const$ można zapisać:

$$\boxed{rot\mathbf{H} = \gamma\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}}$$

$$\boxed{div\mathbf{H} = 0}$$

$$\boxed{rot\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}}$$

$$\boxed{div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}}$$

# 4.6. Układ podstawowych równań pola elektromagnetycznego

- Przy obliczaniu konkretnych zadań powinny być uwzględnione warunki początkowe i brzegowe. Na przykład w chwili t=0 powinny być podane wartości wektorów E i H we wszystkich punktach objętości V, w której rozciąga się pole. Oprócz tego powinno być wiadome jakie są wartości tych wektorów na powierzchni brzegowej S.
- Na granicy dwóch środowisk wartości parametrów *ε, μ i γ zmieniają się skokowo, dlatego na powierzchni granicznej dwóch ośrodków wystąpi skokowa zmiana wektorów pola przy czym warunki brzegowe otrzymane dla pól stałych w czasie zachowują swoją ważność i w odniesieniu do składowych wektorów pola elektromagnetycznego:*

$$\boxed{\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad \boxed{E_{1t} = E_{2t}} \quad \boxed{H_{1t} = H_{2t} = \tau_{pow}} \quad \boxed{\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}}$$

# 4.6. Układ podstawowych równań pola elektromagnetycznego

- Sens fizyczny podstawowych równań pola elektromagnetycznego polega na tym, że pole magnetyczne jest zawsze polem bezźródłowym i wytworzone jest przez ładunki będące w ruchu oraz przez zmieniające się w czasie pole elektryczne.
- Pole elektryczne może być bezźródłowe (w tym przypadku wytworzone przez zmieniające się w czasie pole magnetyczne) lub bezwirowe, jeżeli wytworzone jest poprzez niezmieniające się w czasie ładunki elektryczne.
- Pole elektryczne i magnetyczne, są związane ze sobą ciągłym i wzajemnym przetwarzaniem przedstawiają sobą dwie różne postacie pola elektromagnetycznego znajdującego się w ruchu i niosącego ze sobą energię w ilości:

$$\boxed{W_{em} = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} \mathrm{d}V + \int_V \frac{\mu H^2}{2} \mathrm{d}V}$$

# 4.7. Twierdzenie Umowa-Poyntinga

- Twierdzenie Umowa-Poyntinga przedstawia prawo zachowania energii w polu elektromagnetycznym. Twierdzenie to wiąże zmianę energii w dowolnej objętości ze strumieniem gęstości tej energii, przepływającym przez powierzchnię ograniczającą tą objętość.
- Energia pola elektromagnetycznego w objętości V wynosi:

$$\boxed{W_{em} = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} \mathrm{d}V + \int_V \frac{\mu H^2}{2} \mathrm{d}V}$$

- Energia ta zmienia się w sposób ciągły i zmiana jej w rozpatrywanej objętości wynosi:

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \int_V \varepsilon \boldsymbol{E} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \mathrm{d}V + \int_V \mu \boldsymbol{H} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \mathrm{d}V$$

# 4.7. Twierdzenie Umowa-Poyntinga

- W odniesieniu do środowiska o przenikalności elektrycznej, przenikalności magnetycznej oraz przewodności właściwej – stałej, z równań Maxwella można obliczyć:

$$\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = rot\boldsymbol{H} - \gamma\boldsymbol{E}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -rot\boldsymbol{H}$$

- Wtedy zmiana energii (przyrost) pola elektromagnetycznego może być przedstawiona w następujący sposób:

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = \int_V \boldsymbol{E}\, rot\boldsymbol{H}\, \mathrm{d}V - \int_V \gamma\, \boldsymbol{E}^2 dV - \int_V \boldsymbol{H}\, rot\boldsymbol{E}\, \mathrm{d}V$$

# 4.7. Twierdzenie Umowa-Poyntinga

- Z analizy wektorowej wynika, że:

$$div(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot rot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot rot\boldsymbol{H}$$

- Zatem:

$$\boxed{\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = -\int_V \boldsymbol{div(E \times H)}\,\mathrm{d}V - \int_V \gamma \boldsymbol{E}^2 dV}$$

- Iloczyn wektorowy ***E×H*** oznaczamy przez ***P*** i nazwiemy wektorem Poyntinga. Wartość wektora *P* mierzymy w watach na metr kwadratowy (W/m$^2$)

# 4.7. Twierdzenie Umowa-Poyntinga

- Zgodnie z twierdzeniem Gaussa-Ostrogradzkiego

$$\int_V div\boldsymbol{P}\,\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{P}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

a więc mamy:

$$-\int_S \boldsymbol{P}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \gamma \boldsymbol{E}^2\,\mathrm{d}V + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}$$

- Otrzymane równanie wyraża twierdzenie Umowa-Poyntinga. Strumień wektora Poyntinga wchodzący do powierzchni zamkniętej S równy jest sumie dwóch mocy.
- Pierwsza przedstawia moc strat cieplnych: $\int_V \gamma \boldsymbol{E}^2\,\mathrm{d}V$
- Druga odpowiada zmianie energii pola elektromagnetycznego w rozpatrywanej objętości: $\frac{\partial W_{em}}{\partial t}$

# 4.7. Twierdzenie Umowa-Poyntinga

- Moc strat cieplnych *P* jest zawsze dodatnia. Moc $p_{em}$ odpowiadająca zmieniającej się w czasie energii pola elektromagnetycznego, może być dodatnia i ujemna, w zależności czy energia pola elektromagnetycznego wewnątrz objętości *V* zwiększa się czy zmniejsza.
- Składowa normalna wektora ds. jest dodatnia, jeżeli jest skierowana na zewnątrz powierzchni zamkniętej. Aby strumień wektora ***P*** przechodzący przez powierzchnię ***S*** był dodatni, wektor ***P*** powinien być przede wszystkim skierowany do wnętrza objętości *V* (kąt między wektorem ***S*** i wektorem d***S*** powinien być rozwarty)

# 4.7. Twierdzenie Umowa-Poyntinga

- Wektor Poyntinga można określić jako wielkość, która równa jest liczbowo energii przechodzącej w ciągu 1 sekundy przez pole powierzchni 1m$^2$ prostopadłej do kierunku wektora Poyntinga ***P.***
- Przy rozpatrywaniu twierdzenia Umowa-Poyntinga założono, że w rozpatrywanej objętości ograniczonej powierzchnią zamkniętą *S* nie było źródeł energii.
- Jeżeli istnieją źródła energii w rozpatrywanej objętości *V* a wartość chwilowa mocy źródła energii wynosi $p_ż$ to twierdzenie Poyntinga można przedstawić następująco:

$$p_{ż} = \int_S \boldsymbol{P}\,\mathrm{d}\,S + \int_V \gamma \boldsymbol{E}^2\,\mathrm{d}V + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}$$

# 4.7. Twierdzenie Umowa-Poyntinga

$$p_{\dot{z}} = \oint_S \boldsymbol{P} \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_V \gamma \boldsymbol{E}^2 \,\mathrm{d}V + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}$$

Co oznacza, że moc źródła w objętości $V$ równa jest sumie mocy strat cieplnych, mocy idącej na zmianę energii pola elektromagnetycznego w objętości $V$ i mocy wypływającej przez powierzchnię graniczną $S$ rozpatrywanej objętości.

# 4.7. Równania Maxwella w postaci zespolonej

- Jeżeli składowa wektora natężenia pola elektrycznego ***E*** i magnetycznego ***H*** zmienia ja się w czasie sinusoidalnie i fazy wszystkich trzech składowych sa takie same, to równanie Maxwella można zapisać w postaci zespolonej. Przyjmujemy, że wektor natężenia pola elektrycznego nam następujące składowe:

$$E_x = E_{xm}\sin(\omega t+\psi) = \mathrm{Im}[E_{xm}e^{j\psi}e^{j\omega t}]$$
$$E_y = E_{ym}\sin(\omega t+\psi) = \mathrm{Im}[E_{ym}e^{j\psi}e^{j\omega t}]$$
$$E_z = E_{zm}\sin(\omega t+\psi) = \mathrm{Im}[E_{zm}e^{j\psi}e^{j\omega t}]$$

- Amplitudą zespoloną wektora natężenia pola elektrycznego nazywamy wektor:

$$\underline{\boldsymbol{E}}_m = (\boldsymbol{i}E_{xm} + \boldsymbol{j}E_{ym} + \boldsymbol{k}E_{zm})e^{j\psi} = \boldsymbol{E}_m e^{j\psi}$$

# 4.7. Równania Maxwella w postaci zespolonej

- Wartość chwilowa wektora: $\boldsymbol{E} = \mathrm{Im}[\underline{\boldsymbol{E}}_m e^{j\psi}]$

- W sposób analogiczny można przedstawić amplitudę zespolona natężenia pola magnetycznego:

$$\underline{\boldsymbol{H}}_m = (\boldsymbol{i}H_{xm} + \boldsymbol{j}H_{ym} + \boldsymbol{k}H_{zm})e^{j\psi} = \boldsymbol{H}_m e^{j\psi}$$

- Oraz jego wartość chwilową: $\boldsymbol{H} = \mathrm{Im}[\underline{\boldsymbol{H}}_m e^{j\psi}]$

# 4.7. Równania Maxwella w postaci zespolonej

- Jeżeli w równaniach Maxwella podstawimy wielkości zespolone w miejsce wektorów E i H, to otrzymamy równania które będą słuszne nie tylko dla części urojonych występujących w równaniach Maxwella ale również dla części rzeczywistych.
- W ten sposób zapis równań Maxwella znacznie się uprości i tak dla pierwszego równania mamy:

$$rot\boldsymbol{H} = \gamma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- W wyniku podstawienia otrzymamy:

$$e^{j\omega t}\,\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{H}}_m = e^{j\omega t}\gamma\,\underline{\boldsymbol{E}}_m + \varepsilon\,\underline{\boldsymbol{E}}_m e^{j\omega t}$$

# 4.7. Równania Maxwella w postaci zespolonej

- Po uproszczeniu otrzymujemy pierwsze równanie Maxwella w postaci zespolonej:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{H}}_m = \gamma \underline{\boldsymbol{E}}_m + j\omega\varepsilon \underline{\boldsymbol{E}}_m}$$

- W analogiczny sposób można otrzymać drugie równanie Maxwella:

$$\boxed{rot\,\underline{\boldsymbol{E}} = -j\omega\mu \underline{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{m}}}$$

- oraz

$$div(\mu \underline{\boldsymbol{H}}_{\boldsymbol{m}}) = 0$$

$$div(\varepsilon \underline{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{m}}) = \rho$$

# 4.7. Równania Maxwella w postaci zespolonej

- Dogodność przedstawienia podstawowych równań pola elektromagnetycznego w postaci zespolonej polega na tym, że równaniach tych nie występuje czas *t*.
- Wektorem zespolonym Poyntinga nazywana jest wielkość:

$$\underline{\boldsymbol{P}} = \frac{1}{2}[\underline{\boldsymbol{E}}_m \boldsymbol{H}_m^*]$$

- Gdzie $\boldsymbol{H}_m^*$ jest wartością sprzężoną amplitudy zespolonej natężenia pola magnetycznego. Strumień zespolonego wektora Poyntinga wchodzącego do powierzchni zamkniętej S

$$-\oint_{\boldsymbol{S}} \underline{\boldsymbol{P}} d\boldsymbol{S} = -\int_V div\,\underline{\boldsymbol{P}} dV = -\int_V div(\underline{\boldsymbol{E}}_m \boldsymbol{H}_m^*) dV$$

# 4.7. Równania Maxwella w postaci zespolonej

- Uwzględniajac, że:

$$div(\underline{\boldsymbol{E}}_m \boldsymbol{H}_m^*) = \boldsymbol{H}_m^* rot\, \underline{\boldsymbol{E}}_m - \underline{\boldsymbol{E}}_m rot \boldsymbol{H}_m^*$$

- Oraz:

$$\underline{\boldsymbol{E}}_m \boldsymbol{E}_m^* = \boldsymbol{E}_m^2$$

$$\underline{\boldsymbol{H}}_m \boldsymbol{H}_m^* = \boldsymbol{H}_m^2$$

- Otrzymamy wyrażenie określające strumień wektora Poyntinga przenikającego przez powierzchnię zamkniętą S

$$\boxed{-\oint_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \gamma \frac{\boldsymbol{E}_m^2}{2} dV + j2\omega \int_V \left(\frac{\mu \boldsymbol{H}_m^2}{4} - \frac{\varepsilon \boldsymbol{E}_m^2}{4}\right) dV}$$

# 4.7. Równania Maxwella w postaci zespolonej

- Część rzeczywista poprzedniego wyrażenianrówna jest średniej mocy strat cieplnych za jeden okres; jest to moc czynna:

$$\boxed{\int_V \gamma \frac{\boldsymbol{E}_m^2}{2} dV = P = \mathrm{Re}\{-\oint_S \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{S}\}}$$

- Część urojoną można traktować jako moc bierną w objętości V

$$\boxed{\mathrm{Im}\{-\oint_S \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{S}\} = \mathrm{Im}\{-\oint_S [\underline{\boldsymbol{E}}_m \boldsymbol{H}_m^*] d\boldsymbol{S}\}}$$

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- Aby określić wektory ***E*** i ***H*** przy danym wektorze gęstości prądu ***J*** i gęstości objętościowej ładunków *ρ* należy rozwiązać układ równań Maxwella:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$rot\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$div\,\mu\mathbf{H} = 0$$

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

- Zakładając stałe parametry środowiska, poszukiwane wektory ***E*** i ***H*** przy danych ***J*** i *ρ,* zależą od trzech współrzędnych przestrzennych i czasu. Bezpośrednie rozwiązanie równań Maxwella związane jest zazwyczaj z dużymi trudnościami.
- Można je uprościć wprowadzając funkcje pomocnicze *φ* i ***A.*** *Nazywamy je potencjałami elektrodynamicznymi uogólnionymi*

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- Zależności pomiędzy ***E*** i ***H*** a także $\varphi$ i ***A*** ustala się w ten sposób, aby podstawowe równania przyjęły postać jak najbardziej dogodną z punktu widzenia rozwiązania. Przyjmuje się:
- rot ***A*** = *μ**H*** = ***B*** *(div **B**=0)*

(*W celu jednoznacznego określenia wektora **A** trzeba wyznaczyć ponadto jego dywergencję, którą dobieramy również z myślą uproszczenia otrzymanych zależności).*

Więc natężenia pola magnetycznego można wyrazić poprzez potencjał wektorowy uogólniony ***A:***

***H*** = *1/μ* rot ***A***

podstawiając wielkość H do drugiego równania Maxwellai po pewnych uproszczeniach otrzymamy:

$$rot(\boldsymbol{E} + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0$$

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- Ponieważ pole wektora $\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ jest potencjalne, można
- określić taką funkcję skalarną $\varphi$ dla której istnieje gradient:

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -grad\,\varphi$$

- Wielkość fizyczną $\varphi$ nazywamy *potencjałem skalarnym uogólnionym*. W ten sposób można powiązać potencjały uogólnione z wektorami natężenia pola elektrycznego ***E*** i magnetycznego ***H.***

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} rot\boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - grad\,\varphi$$

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- Uwzględniając powyższe zależności , pierwsze równanie Maxwella można przedstawić w postaci:

$$rot(\frac{1}{\mu} rot\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{t}} - grad\varphi)}{\partial t}$$

- Lub:

$$rot\,rot\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{J} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t} - grad(\varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t})$$

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- Po rozwinięciu rotacji rotacji wektora:
- rot rot ***A*** = grad div ***A*** - $\nabla^2$***A*** oraz oznaczeniu***:*** *$\mu\varepsilon = 1/v^2$*
- Otrzymamy:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\mu \boldsymbol{J} + grad(div\boldsymbol{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t})$$

- Można tak dobrać A aby równanie uprościło się przyjmując postać:

$$div\boldsymbol{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

- Wtedy potencjał wektorowy A:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\mu \boldsymbol{J}$$

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- Jeżeli powyższe równanie przedstawimy przyjmując współrzędne prostokątne:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}A_x + \boldsymbol{j}A_y + \boldsymbol{k}A_z, \qquad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{i}J_x + \boldsymbol{j}J_y + \boldsymbol{k}J_z$$

- Otrzymamy trzy *równania d'Alemberta:*

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu J_x$$

$$\nabla^2 A_y - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 Ay}{\partial t^2} = -\mu J_y$$

$$\nabla^2 A_z - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu J_z$$

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- Oraz jeszcze czwarte równanie dla potencjału skalarnego:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

- Wprowadzając więc potencjały uogólnione A i  , sprowadziliśmy równania Maxwella do czterech równań d'Alemberta, które sa równaniami tego samego typu. W ten sposób rozwiązanie równań pola elektromagnetycznego uprościło się znacznie.

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- Rozwiązanie równań d'Alemberta można przedstawić w postaci całkowej:

$$\varphi_t = \int_V \frac{\rho(t - \frac{r}{v})}{2\pi\varepsilon r} dV \qquad \boldsymbol{A}_t = \int_V \frac{\mu \boldsymbol{A}(t - \frac{r}{v})}{2\pi r} dV$$

- Gdzie w celu obliczenia potencjałów skalarnych w punkcie *N* i chwili *t*, należy podzielić objętość *V* na elementarne objętości *dV*, następnie obliczając ładunek w tej elementarnej objętości w chwili (*t-r/v*), gdzie r to odległość od elementarnej objętości *dV*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

- do punktu *N a* *jest prędkością rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w dielektryku o przenikalności bezwzględnej ε i μ.*

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- W ten sposób możemy dojść do postaci równań które określają potencjały uogólnione

$$\boxed{\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0}$$

$$\boxed{\nabla^2 \boldsymbol{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0}$$

- Które nazywamy *równaniami falowymi*.

# 4.8. Potencjały elektrodynamiczne opóźnione lub uogólnione

- Aby rozwiązać równania falowe i równania d'Alemberta należy dla każdego przypadku uwzględnić warunki początkowe i brzegowe.

- $E_{1t} = E_{2t}$; $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$
- $H_{1t} - H_{2t} = \tau_{pow}$; $B_{1n} = B_{2n}$
- $\Phi_1 = \varphi_2$; $A_1 = A_2$